

SIMULACION NUMERICA DEL FLUJO UNIDIMENSIONAL DE UN GAS REAL A TRAVES DE UN MEDIO POROSO

ENRIQUE A. DARDERES*
O.M. SORARRAIN**

y
M.S. BIDNER*

**Laboratorio de Ingeniería de Reservorios,
Facultad de Ingeniería - UNLP -,
1 esq. 47, 1900 La Plata,
ARGENTINA*

*** Departamento de Física,
Facultad de Ciencias Exactas - UNLP -,
49 y 115, 1900 La Plata,
ARGENTINA*

RESUMEN

Se resuelve la ecuación diferencial de difusión para un gas real en un reservorio poroso e isotérmico. Este problema está representado por una ecuación diferencial no lineal. Esta se resuelve utilizando y comparando dos aproximaciones en diferencias finitas:

1. Esquema explícito en transmisibilidades e implícito en presiones.
2. Esquema implícito en transmisibilidades y presiones.

Ambos esquemas se resuelven iterando sobre sus coeficientes variables; además se emplea el método de Newton-Raphson generalizado. Las resoluciones se comparan entre sí y con una solución analítica hallada por W.E. Culham et al.¹. También se comparan los resultados numéricos con mediciones de una experiencia de laboratorio presentada por G.H. Bruce et al.². Finalmente se analiza la influencia de la variación de las propiedades del gas con la presión, de la porosidad y permeabilidad sobre los perfiles de presión, utilizando datos de un yacimiento de gas real hidrocarburo³.

SUMMARY

The differential equation for the diffusion of a real gas in a porous and isothermic medium, is solved. This process is represented by a nonlinear differential equation. Two finite difference approximations have been applied and compared:

1. Explicit in transmissibilities and implicit in pressures.
2. Implicit in transmissibilities and pressures.

Both approximations have been solved by iteration on the variable coefficients, and also using the generalized method of Newton-Raphson. The results have been compared among

Recibido: Mayo 1986

them and with an analytic solution obtained by W.E. Culham et al.¹. Besides, the numerical solution have also been compared with laboratory results presented by G.H. Bruce et. al.². Finally, the influence of the variation of gas properties, porosity and permeability upon the calculated pressure is analyzed with data of a real hydrocarbon gas reservoir³.

INTRODUCCION

El flujo de gas en yacimientos —regido por una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden— ha sido estudiado con distintas aproximaciones, por diversos autores.

Esta ecuación diferencial, para las condiciones de borde de interés práctico, no tiene solución analítica debido a la no linealidad causada por las variaciones de las propiedades del gas con la presión y, eventualmente, las variaciones de las propiedades del medio poroso con ésta (para el caso de la permeabilidad) y con la posición.

Bruce et al.² resuelven numéricamente la ecuación de difusión correspondiente a un gas ideal, para flujo unidimensional e isotérmico (caso lineal y radial), considerando un caudal de producción constante. Comparan sus resultados numéricos con resultados experimentales obtenidos en el laboratorio.

Posteriormente, Al'Hussainy⁴ propone un método de resolución semi-analítico aplicable a gases reales. Con ese objetivo define una nueva variable, la pseudo-presión de un gas real. Introduciendo la pseudo-presión se obtiene una ecuación diferencial lineal y se pueden aplicar las soluciones publicadas por Van Everdingen y Hurst⁵. Con este procedimiento Al'Hussainy y Ramey³ estiman la variación de permeabilidad en el entorno de un pozo productor, por efecto de la turbulencia y daños en la formación, a partir de ensayos de pozos. Aplicaciones similares han sido consideradas por Wattenbarger y Ramey⁶.

Coats et al.⁷ presentan un modelo numérico bidimensional para flujo de gas en reservorios, considerando diversos efectos: turbulencia, pelicular, penetración parcial y dependencia de la permeabilidad con la presión. Este modelo permite analizar ensayos de pozos y efectuar pronósticos de producción.

Hurst⁸ propone resolver la ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden para flujo radial cilíndrico, mediante un cálculo por etapas linealizando la ecuación en cada etapa. Este procedimiento permite hallar soluciones con una pequeña computadora o una calculadora.

Dranchuk y Flores⁹ desarrollan un método numérico para resolver la misma ecuación completa teniendo en cuenta la dependencia de las propiedades físicas del gas y la compresibilidad de la roca con la presión, y los efectos de flujo inercial y turbulento. Lo hacen para cuatro condiciones de borde considerando un sistema radial finito.

En el trabajo aquí presentado se resuelve la ecuación que describe el flujo unidimensional, transitorio de un gas real a través de un medio poroso. Este problema fue resuelto por Bruce et al.² para el caso particular de un gas ideal con la condición de contorno de caudal nulo en uno de sus bordes y caudal constante (no nulo) en el otro borde. En forma complementaria, acá se tienen en cuenta la variación de la compresibilidad, factor de desviación y viscosidad del gas con la presión, así como

la posible variación de la permeabilidad con la posición. Además se resuelven tres diferentes problemas de contorno: presión o bien caudal de producción constante (no nulo) en un borde, suponiendo en ambos casos caudal nulo en el otro borde; y un problema de contorno particular propuesto por Culham et al.¹ para el cual hay solución analítica.

La resolución numérica se realiza aplicando distintas técnicas en diferencias finitas. Dichas técnicas son: un esquema semi-implícito (explícito en transmisibilidades e implícito en presiones), un esquema implícito en transmisibilidades y presiones; completando la resolución de este último mediante el método de Newton-Raphson generalizado. Además se analiza la estabilidad y convergencia de los esquemas propuestos.

El objetivo principal de esta comunicación es la comparación de distintas técnicas numéricas entre sí, para flujo de un gas real hidrocarburo en condiciones de yacimiento. Es decir, se considera la variación de las propiedades del gas con la presión y las del medio poroso con la posición. A este efecto se utilizan datos de yacimientos reportados por Al'Hussainy et al.³.

Por otra parte las soluciones numéricas se comparan con una solución analítica para un caso particular, como lo es el problema propuesto por Culham et al.¹, y además, con los resultados de la experiencia de laboratorio presentada por Bruce et al.².

Se debe mencionar que el problema resuelto encuentra aplicación práctica para el caso de pozos gasíferos fracturados. En efecto, representa el flujo transitorio lineal de gas en un yacimiento, desde el bloque de baja permeabilidad hacia la fractura.

Además, describe el flujo de un gas a través de "sandpacks" (cilindros de arena compactada a través de los cuales se hace fluir el gas), en el laboratorio, del tipo descrito por Bruce et al.².

MODELO MATEMATICO

El modelo matemático de difusión del gas en un medio poroso ha sido establecido considerando las hipótesis siguientes:

1. El medio poroso es incompresible (porosidad constante) y físicamente homogéneo e isótropo.
2. El flujo se considera horizontal, monofásico (fase gaseosa), laminar e isotérmico. Contrariamente a lo que podría pensarse, el hecho de considerar al flujo isotérmico, da una muy buena aproximación (y de hecho frecuentemente utilizada) para yacimientos de gases hidrocarburos. Al ser el flujo laminar podemos utilizar la ley de Darcy¹⁰.
3. Se consideran las variaciones de las propiedades del gas, tales como: viscosidad, factor de desviación y coeficiente de compresibilidad, con la presión.

Si se suponen válidas las condiciones anteriores, recordando la ecuación de continuidad^{10,11}, se tiene

$$-\nabla \rho \mathbf{v} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} - q \quad (1)$$

siendo ρ y v la densidad y velocidad del gas respectivamente, ϕ la porosidad del medio y q la masa del fluido inyectado o extraído en el entorno de cada punto por unidad de volumen en la unidad de tiempo (esta cantidad se toma negativa si se extrae fluido del reservorio poroso, y positiva si se inyecta fluido al mismo). Además, de la ley de Darcy

$$v = - \frac{K}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla D) \quad (2)$$

donde K es la permeabilidad del medio, μ la viscosidad del gas, P la presión, g la aceleración de la gravedad y D la profundidad¹¹ y si se desprecian los efectos de gravedad, la ecuación (1) puede escribirse:

$$\nabla \left(\frac{K}{\mu} \rho \nabla P \right) + q = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3)$$

La ecuación de estado para un gas real es¹²:

$$\rho = \frac{PM}{ZRT} \quad (4)$$

donde M es el peso molecular del gas, Z es el factor de desviación del gas real respecto de las propiedades del gas ideal (si $Z = 1$ se tiene gas ideal), R es la constante de los gases y T la temperatura del gas real bajo consideración.

Combinando las ecuaciones (3) y (4) obtenemos la ecuación diferencial de difusión del gas en términos de la presión, en la forma:

$$\nabla \left(\frac{K}{\mu} \frac{P}{Z} \nabla P \right) + q \frac{RT}{M} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z} \right) \quad (5)$$

Además, el coeficiente de compresibilidad, c , puede expresarse, a partir de la ecuación de estado (4), de la siguiente manera:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dP} \quad (6)$$

Si se tiene en cuenta la última relación para la compresibilidad, la ecuación diferencial (5) puede escribirse:

$$\nabla \left(\frac{\lambda}{Z} \nabla P^2 \right) + Q = \frac{\phi c}{Z} \frac{\partial P^2}{\partial t} \quad (7)$$

donde

$$\lambda = \frac{K}{\mu} \quad \text{y} \quad Q = \frac{2qRT}{M}$$

Considerando que la producción ocurre en $x = 0$ y la permeabilidad se anula en $x = L$, las condiciones iniciales y de contorno utilizadas para resolver la ecuación (7) son las siguientes:

$$\text{Sea } \psi(x, t) = P^2(x, t)$$

1. Presión de producción constante en el borde $x = 0$:

$$\psi(0, t) = \psi_w \quad ; \quad t > 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad (9)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_{\text{inic}} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L \quad (10)$$

2. Caudal de producción constante en el borde $x = 0$:

Definiendo el caudal molar de producción² como la cantidad de moles de gas producidos en la unidad de tiempo mediante

$$q_M = \rho \frac{v A}{M} = - \frac{K A}{2\mu Z R T} \frac{\partial P^2}{\partial x} \quad (11)$$

donde A es el valor del área transversal a la velocidad de flujo, v , se tiene:

$$\frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad (12a)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = - q_M \frac{2\mu Z R T}{K A} \quad ; \quad t > 0 \quad (12b)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_{\text{inic}} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L \quad (12c)$$

3. Finalmente se resuelve el problema de contorno planteado por Culham et al.¹ que consta de la siguiente ecuación para el flujo del gas bajo consideración

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(P) \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\bar{B} T}{M} S(x, t) = \beta(P) \frac{\partial P}{\partial t} \quad ; \quad 0 < x < L \quad ; \quad t > 0 \quad (13)$$

siendo

$$\alpha(P) = \frac{kP}{Z\mu}$$

y

$$\beta(P) = \frac{\phi A}{Z} \left(1 - \frac{P}{Z} \frac{dZ}{dP} \right)$$

Aquí A y \bar{B} son constantes de conversión de unidades y $S(t, x)$, que se muestra en la ecuación (16), se define de manera tal que (13) posea solución analítica para las condiciones iniciales y de contorno siguientes

$$P(x, 0) = P_0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq L \quad (14a)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad (14b)$$

$$P(L, t) = P_0 (1 - a_1 \gamma t e^{-\gamma t}) \quad ; \quad t > 0 \quad (14c)$$

La solución a este problema de contorno es:

$$P(x, t) = P_0 [a_2 (1 - e^{-a_3 \gamma t}) f(x) + (1 - a_1 \gamma t e^{-\gamma t})] \quad (15)$$

donde

$$f(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(0.25 - \frac{x}{L}\right) \left(0.5 - \frac{x}{L}\right) \left(0.75 - \frac{x}{L}\right) \left(1.0 - \frac{x}{L}\right)$$

y el término fuente empleado en la ecuación (13) está dado por

$$S(x, t) = \frac{P_0 M}{\bar{B} T} \left[\gamma \beta (a_2 a_3 f(x) e^{-a_3 \gamma t} + a_1 e^{-\gamma t} (\gamma t - 1)) - \right. \\ \left. - a_2 (1 - e^{-a_3 \gamma t}) \frac{df}{dx} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - a_2 \alpha (1 - e^{-a_3 \gamma t}) \frac{d^2 f}{dx^2} \right] \quad (16)$$

$A = 158.07$ y $\bar{B} = 1696.41$, P_0 es la presión inicial, $\gamma = \frac{K_{\max} P_0}{\phi \mu_0 L^2}$, siendo μ_0 la viscosidad del gas evaluada a la presión inicial. Finalmente $a_1 = 0.20$, $a_2 = 140.0$ y $a_3 = 40.0$ son constantes de integración. Obsérvese que en el Sistema Internacional de Unidades, $A = 1$ y $\bar{B} = R$ (constante general del estado gaseoso).

Cabe mencionar que este último problema de contorno carece de significado físico; su utilidad reside en que al poseer solución analítica, puede emplearse para comparar técnicas numéricas de resolución de problemas de contorno.

Finalmente, la ecuación diferencial (13) puede escribirse en la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{Z} \frac{\partial P^2}{\partial x} \right) + Q(x, t) = A \frac{\phi c}{Z} \frac{\partial P^2}{\partial t} \quad (17)$$

donde

$$Q(x, t) = 2 \frac{\bar{B} T}{M} S(x, t) \quad (18)$$

que tiene el mismo aspecto que la ecuación (7) para una dimensión en coordenadas cartesianas.

MODELO NUMERICO

Ecuación en diferencias

La ecuación diferencial planteada, (7), se resuelve numéricamente mediante diferencias finitas. A tal efecto se considera una grilla correspondiente al sistema coordenado (x, t) con pasos Δx y Δt .

Se utilizan los índices i y n para indicar el punto de la grilla bidimensional

$$[(i-1)\Delta x, n\Delta t] \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, N+1 \quad \text{y} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

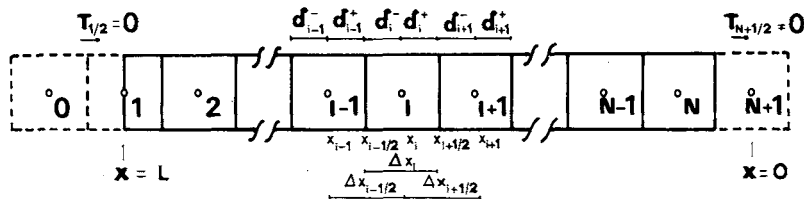


Figura 1. Grilla espacial unidimensional para condición de contorno de presión constante en $x = 0$.

Considerando la grilla espacial de la Figura 1 se tiene

$$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \Delta x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i \quad ; \quad \Delta x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - x_{i-1}$$

$$\delta_i^+ = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i \quad ; \quad \delta_i^- = x_i - x_{i-\frac{1}{2}}$$

Si se toman los tamaños de bloque en forma uniforme, $\Delta x_i = \Delta x$ para todo $i = 1, 2, \dots$ con puntos centrados en los bloques, se selecciona la longitud de cada bloque Δx_i y se centran los puntos correspondientes x_i dentro de cada bloque, resultan las siguientes relaciones¹⁰:

$$\delta_i^+ = \delta_i^- = \frac{\Delta x_i}{2} \quad ; \quad \Delta x_{i+\frac{1}{2}} = \delta_i^+ + \delta_{i+1}^- = \Delta x_i$$

Luego, el sistema de ecuaciones en diferencias puede expresarse en la forma:

$$\bar{T}\bar{\psi} + \bar{Q}' = \bar{\Gamma}' \Delta_t \bar{\psi} \quad (19)$$

La matriz \bar{T} es simétrica y tridiagonal, de donde el esquema resulta conservativo¹⁰. $\bar{\Gamma}'$ es una matriz diagonal, \bar{Q}' , $\Delta_t \bar{\psi}$ y $\bar{\psi}$ son vectores columna (Apéndice).

En componentes, la fila i -ésima de la ecuación matricial (19) es de la forma:

$$T_{i-\frac{1}{2}}\psi_{i-1} - \left[T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \left(\frac{c}{Z} \right)_i \right] \psi_i + T_{i+\frac{1}{2}}\psi_{i+1} + Q'_i + \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \left(\frac{c}{Z} \right)_i \psi_i^n = 0 \quad (20)$$

Discretización de las condiciones iniciales y de contorno

Para los dos primeros problemas de contorno descritos se tiene la condición de borde en $x = L$ dada por (9), y para el problema propuesto por Culham et al.¹ la condición análoga se impone en $x = 0$ y está dada por (14b).

De acuerdo a la Figura 1 tomando la ecuación en diferencias (20) para el primer bloque, $i = 1$, la discretización de la condición de contorno (9) es:

$$T_{\frac{1}{2}}^n = 0 \quad ; \quad t = n\Delta t \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

La condición de borde en $x = 0$ para el primer problema de contorno planteado es de presión de producción constante y está dada por (8). De acuerdo, nuevamente a la Figura 1

$$\psi_{N+1}^n = \psi_w \quad ; \quad t = n\Delta t \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Para el segundo problema de contorno la condición de borde $x = 0$ es caudal constante. Para la grilla de la Figura 2 se tiene

$$Q_N^n = 2V_N q_N \frac{RT}{M} = 2q_M RT \quad ; \quad t = n\Delta t \quad \text{con} \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

siendo q_M el caudal molar definido en (11).

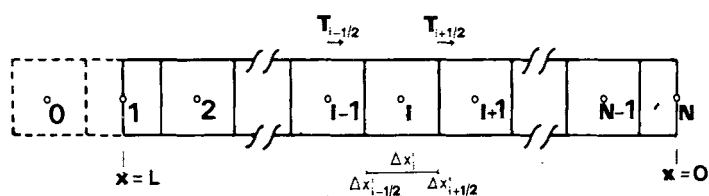


Figura 2. Grilla espacial unidimensional para condición de contorno de caudal constante en $x = 0$.

Finalmente, el problema de contorno planteado por Culham et al.¹ discretizado consta de la condición de borde en $x = 0$ dada por (21) y la condición de borde en $x = L$ de acuerdo a la forma (17) de la ecuación diferencial y a la condición de borde (14c), se expresa así:

$$\psi_{N+1}^n = \psi_{\text{inic}} [(1 - a_1 \gamma t e^{-\gamma t})]^2 \quad ; \quad t = n\Delta t \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Además, el término de fuente para la ecuación diferencial (17) de acuerdo a (18) en el Sistema Internacional de Unidades toma la forma siguiente:

$$Q = 2 \frac{RT}{M} S(x, t)$$

y evaluado en un punto genérico de la i -ésima grilla queda:

$$Q_i^n = 2 \frac{RT}{M} V_i S_i^n(x, t) \quad \text{siendo} \quad \begin{array}{ll} t = n\Delta t & n = 0, 1, \dots \\ x = (i-1)\Delta x & i = 1, 2, \dots, N \end{array} \quad (25)$$

La condición inicial es común a los tres problemas de contorno presentados y se expresa

$$\psi_i^n = \psi_{\text{inicial}} \quad \text{con} \quad n = 0$$

Métodos de solución

Para la resolución del sistema (19) se utilizaron tres métodos:

1. Esquema explícito en \bar{T} e implícito en $\bar{\psi}$:

$$\bar{T}^n \bar{\psi}^{n+1} + \bar{Q}' = \bar{\Gamma}^{n+1} (\bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n) \quad (26)$$

iterando sobre $(\frac{c}{Z})_i^{n+1,k}$ de acuerdo a la definición de $\bar{\Gamma}'$ dada en el Apéndice.

2. Esquema implícito en \bar{T} y en $\bar{\psi}$:

$$\bar{T}^{n+1} \bar{\psi}^{n+1} + \bar{Q}' = \bar{\Gamma}^{n+1} (\bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n) \quad (27)$$

iterando sobre las cantidades $(\frac{c}{Z})_i^{n+1,k}$; $T_{i \pm \frac{1}{2}}^{n+1,k}$ de acuerdo a las definiciones de $\bar{\Gamma}'$ y \bar{T} del Apéndice.

Para ambos esquemas resulta un conjunto de ecuaciones lineales de estructura tridiagonal que puede resolverse mediante el algoritmo de Thomas^{2,10,11}. En ambos casos se itera a partir de los valores iniciales $\psi_i^{(0)} = \psi_{\text{inic}}$ usando las condiciones de contorno ya mencionadas según cada problema. Las iteraciones se continúan hasta satisfacer criterios prefijados de convergencia, en la forma

$$\text{Max}_i \left| \frac{\psi_i^{k+1} - \psi_i^k}{\psi_i^{k+1}} \right| < \varepsilon \quad (28)$$

(se utilizó $\varepsilon = 10^{-3}$).

3. Newton-Raphson:

Por otra parte, el tercer método empleado consiste en resolver el esquema totalmente implícito mediante el método de Newton-Raphson generalizado. A tal efecto, de (27) se define la función de Newton en la forma:

$$\bar{f}(\bar{\psi}^{n+1}) = \bar{T}^{n+1} \bar{\psi}^{n+1} + \bar{Q}' - \bar{\Gamma}^{n+1} (\bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n) \quad (29)$$

que expresada en componentes para la i -ésima celda (se omitirá el supraíndice $n + 1$ y solamente se denotará el índice n), resulta

$$\begin{aligned} f_i(\psi_{i-1}, \psi_i, \psi_{i+1}) = & T_{i+\frac{1}{2}}\psi_{i+1} - \left[T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \left(\frac{c}{Z} \right)_i \right] \psi_i + \\ & + T_{i-\frac{1}{2}}\psi_{i-1} + Q'_i + \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \left(\frac{c}{Z} \right)_i \psi_i^n = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (30)$$

Llamamos \bar{F} a la matriz jacobiana de la función vectorial \bar{f} , cuyos elementos se definen mediante¹⁰,

$$F_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \psi_j} \right)^{(k)} \quad (31)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{i+1}} &= \frac{\partial T_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \psi_{i+1}} (\psi_{i+1} - \psi_i) + T_{i+\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{i-1}} &= \frac{\partial T_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \psi_{i-1}} (\psi_{i-1} - \psi_i) + T_{i-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f_i}{\partial \psi_i} &= \frac{\partial T_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \psi_i} (\psi_{i+1} - \psi_i) + \frac{\partial T_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \psi_i} (\psi_{i-1} - \psi_i) - \\ &- T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \left(\frac{c}{Z} \right)_i + \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \frac{d}{d\psi_i} \left(\frac{c}{Z} \right)_i (\psi_i^n - \psi_i) \end{aligned}$$

El procedimiento iterativo puede sintetizarse en la forma

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(k-1)} \bar{\delta}^{(k)} &= -\bar{f}^{(k-1)} \\ \bar{\psi}^{(k)} &= \bar{\psi}^{(k-1)} + \bar{\delta}^{(k)} \\ \bar{\psi}^n &= \bar{\psi}^{(0)} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

La matriz jacobiana es tridiagonal y puede resolverse empleando el algoritmo de Thomas^{2,10,11}. Además, el método de Newton-Raphson es convergente solamente comenzando las iteraciones con un valor inicial suficientemente próximo a la solución correspondiente al paso $n + 1$. Por tal motivo en cada instante de tiempo se dispara este método utilizando previamente cualquiera de los métodos anteriores, observando que la convergencia del método de Newton-Raphson implica que los vectores $\bar{\delta}$ y \bar{f} tiendan a cero^{10,13}.

Las expresiones correspondientes a $\frac{d}{d\psi_i}(\frac{c}{Z})_i$ y $\frac{\partial T_i}{\partial \psi_i}$ y similares se muestran en el Apéndice.

Estabilidad y convergencia

El procedimiento para examinar el crecimiento del error involucrado en el empleo de las ecuaciones en diferencias (26) y (27) consiste en suponer que al nivel de tiempo n existe un conjunto de errores en los puntos $(1, n), \dots (i, n), \dots (N, n)$ a los cuales denotamos en la forma ε_i^n y cuya descomposición armónica a lo largo de la dirección x es la siguiente^{2,11,14,15,16}:

$$\varepsilon_i^n = \sum_i \gamma^n e^{I\beta i \Delta x} \quad (33)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$; $I = \sqrt{-1}$ (unidad imaginaria) y $\beta = \frac{2\pi}{N\Delta x}$.

Si se expresa el operador en diferencias correspondiente a la i -ésima celda para los esquemas (26) y (27) en forma compacta,

$$L_D \psi_i + Q_i = 0 \quad (34)$$

y definiendo al error en P_i^n como el ε_i^n dado en (33) se tiene²

$$L_D (P_i + \varepsilon_i)^2 + Q_i = 0 \quad (35)$$

En lo que sigue supondremos que tratamos con un gas ideal en un medio poroso incomprensible, isótropo y homogéneo de permeabilidad y porosidad constantes. En estas condiciones, desarrollando (35) y despreciando términos de segundo orden, se obtiene:

$$L_D (P_i + \varepsilon_i)^2 + Q_i - [L_D \psi_i + Q_i] = L'_D \varepsilon_i = 0$$

Dividiendo a $L'_D \varepsilon_i = 0$ por $\frac{\phi_i V_i}{z_i \Delta t} = a_i$ obtenemos

$$B_i \varepsilon_{i-1}^{n+1} - A_i \varepsilon_i^{n+1} + C_i \varepsilon_{i+1}^{n+1} - D_i^2 \varepsilon_i^{n+1} - 1 + 2 D_i \varepsilon_i^n = 0 \quad (36)$$

donde

$$\begin{aligned} B_i &= 2T_{i-\frac{1}{2}} P_{i-1}^{n+1} / a_i & A_i &= 2P_i^{n+1} (T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}}) / a_i \\ C_i &= 2T_{i+\frac{1}{2}} P_{i+1}^{n+1} / a_i & D_i &= P_i^n / P_i^{n+1} \end{aligned}$$

Sustituyendo una componente del desarrollo (33) en (36) y reordenando queda:

$$\gamma = \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^n} = \frac{2D_i}{\left[(1 + D_i^2 + A_i - (B_i + C_i)\cos\beta\Delta x) + I((B_i - C_i)\sin\beta\Delta x) \right]} \quad (37)$$

De acuerdo al criterio de von Neumann una condición suficiente para la estabilidad es que el factor de amplificación (37) verifique $|\gamma| \leq 1$. Así los errores introducidos en alguna etapa del cálculo no se amplifican en los cálculos siguientes^{14,15,16}.

Entonces

$$|\gamma|^2 = \frac{4D_i^2}{\left[\left(1 + D_i^2 + A_i - (B_i + C_i)\cos\beta\Delta x \right)^2 + (B_i - C_i)^2\sin^2\beta\Delta x \right]} \quad (38)$$

la condición $|\gamma| \leq 1$ conduce, considerando $\sin^2\beta\Delta x = 0$ y $\cos^2\beta\Delta x = 1$, a:

$$1 + D_i^2 + A_i - (B_i + C_i) \geq 2D_i \quad (39)$$

De las definiciones de A_i , B_i y C_i se obtiene:

$$A_i - (B_i + C_i) = \frac{2 \left[T_{i-\frac{1}{2}} (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) + T_{i+\frac{1}{2}} (P_i^{n+1} - P_{i+1}^{n+1}) \right]}{a_i} \quad (40)$$

Con las suposiciones efectuadas, las definiciones de $T_{i\pm\frac{1}{2}}$ (ver Apéndice) y observando la Figura 2, se concluye que

$$T_{i-\frac{1}{2}} \leq T_{i+\frac{1}{2}}$$

y como

$$|P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}| \leq |P_i^{n+1} - P_{i+1}^{n+1}|$$

entonces siempre se cumple que:

$$A_i - (B_i + C_i) \geq 0 \quad (41)$$

Por lo tanto, la desigualdad (39) se verifica para cualesquiera valores de los parámetros β , Δx y Δt .

Del análisis de las ecuaciones correspondientes a los puntos extremos de la grilla, donde se representan las distintas condiciones de borde, tampoco surge restricción alguna en los valores de los parámetros β , Δt y Δx para satisfacer la condición de estabilidad (39). Se concluye entonces, que bajo las simplificaciones mencionadas, el esquema es incondicionalmente estable para los problemas de contorno de interés.

En realidad las experiencias numéricas efectuadas indican que la conclusión expuesta no sólo es válida para el caso de gas ideal, sino que también se verifican las condiciones de estabilidad obtenidas en casos de flujos de gases reales hidrocarburos con fuertes variaciones en las propiedades de los mismos respecto de la presión y además con gran variabilidad de la permeabilidad y la porosidad del medio. Esto se mostrará en las aplicaciones.

ANALISIS DE RESULTADOS

Las soluciones numéricas de la ecuación diferencial parcial no lineal, que representa el flujo de un gas real a través de un medio poroso, son verificadas con casos particulares publicados y con mediciones experimentales.

Por otro lado el modelo numérico es aplicado en condiciones de yacimientos, es decir a altas presiones donde las propiedades del gas real hidrocarburo varían con la presión. Se obtienen las distribuciones de presión en la zona de influencia de un pozo productor de gas, para dos condiciones de operación del mismo: caudal de extracción constante en el tiempo y presión en el fondo del pozo productor constante en el tiempo.

Además la influencia en dichas distribuciones de presión de las propiedades de la roca (ϕ y K) y de las propiedades del gas (Z , μ , c) son analizadas y discutidas.

Comparación con mediciones experimentales y con soluciones numéricas de Bruce et al.²

Estos autores utilizaron un equipo experimental consistente en un cilindro galvanizado en cuyo interior construyeron un lecho empacado de arena a través del cual hicieron fluir un gas en condiciones muy aproximadamente ideales. Las medidas de presión fueron tomadas en los extremos del tubo, de una longitud total de 6.27 m y en cuatro posiciones intermedias.

En esta experiencia la porosidad de la arena fue de 36.7% y la permeabilidad, determinada por experiencias realizadas con flujo estacionario, resultó en promedio de 13.2 md, con una variación de aproximadamente 10% entre los extremos.

El gas utilizado en la experiencia fue nitrógeno inicialmente a una presión uniforme dentro del tubo de 745 kPa, imponiendo como condición de contorno en el borde exterior un caudal molar constante de 4.58×10^{-5} Kgmol.h⁻¹, y manteniendo la temperatura constante en el sistema de 298.7°K.

Al comportarse el nitrógeno como un gas muy aproximadamente ideal, en las condiciones de la experiencia, se tomó $Z = 1$ en el simulador y la viscosidad constante al valor $\mu = 0.01145$ cp = 1.145×10^{-5} Pa.seg.

En la Figura 3 se muestran los resultados experimentales como pequeños círculos y los numéricos con trazo continuo. La concordancia es excelente, puesto que las condiciones de la experiencia son idénticas a las hipótesis realizadas para resolver el modelo numérico aquí propuesto.

Los tres métodos numéricos acá propuestos dieron resultados prácticamente coincidentes con las líneas continuas de la Figura 3.

En consecuencia, aplicando el método más sencillo —explícito en transmisibilidades e implícito en presiones— se resuelve la ecuación de difusividad para los mismos datos pero considerando una variación lineal con la posición de la permeabilidad del 10%, es decir

$$K(x) = \frac{(k'_1 - k'_0)}{L} x + k'_0 \quad (42)$$

donde $k'_0 = 1.05 k_0$ y $k'_1 = 0.95 k_0$.

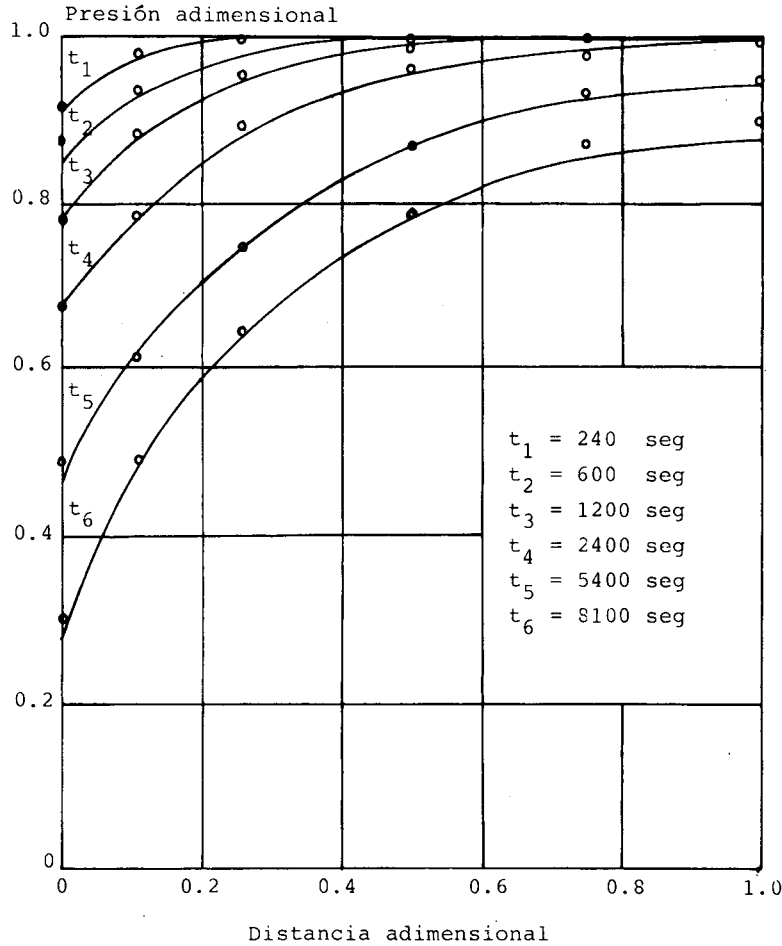


Figura 3. Comparación de las soluciones numéricas con los resultados experimentales reportados por Bruce et al.² (1953).

Los resultados obtenidos no difieren prácticamente de los hallados para permeabilidad constante. En efecto, si se define el vector error relativo porcentual del ajuste global a los valores experimentales como:

$$\tilde{\varepsilon}_G = \left(\varepsilon_G(x_i, t_l) \right) \quad \text{con } 1 \leq i \leq 6 \text{ y } 1 \leq l \leq 6 \quad (43)$$

(donde i recorre las posiciones sobre el cilindro en que se toman las medidas de presión y l los tiempos en los cuales se efectúan estas mediciones) de componentes

$$\varepsilon_G(x_i, t_l) = \left| \frac{P^{\text{exp}}(x_i, t_l) - P^{\text{cal}}(x_i, t_l)}{P^{\text{exp}}(x_i, t_l)} \right| 100 \quad (44)$$

siendo $P^{\text{exp}}(x_i, t_l)$ las presiones medidas en la experiencia en las posiciones x_i a los tiempos t_l y $P^{\text{cal}}(x_i, t_l)$ las presiones calculadas en las mismas condiciones; tomando la norma euclídea del vector $\tilde{\varepsilon}_G$.

$$\|\tilde{\varepsilon}_G\|_2 = \left[\sum_{l,i} \varepsilon_G(x_i, t_l)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

como una medida de la bondad del ajuste, se obtiene que con los resultados para permeabilidad constante $\|\tilde{\varepsilon}_G\| = 14.7\%$ y cuando la permeabilidad varía con la posición según (42) se tiene $\|\tilde{\varepsilon}_G\| = 11.7\%$.

Se examinó el efecto del error de truncación derivado del tamaño de la grilla uniforme, Δx y del paso del tiempo, Δt , tomando todas las combinaciones posibles que resultan de elegir el número de puntos de grilla igual a 6, 10, 20, 30, 40, 50, y 100; y los Δt iguales a 0.03125, 0.125, 0.250, 0.5, 1.0 y 5.0 minutos; observándose que para Δt menor o igual a 1.0 minuto y un número de incrementos en el espacio mayor o igual que 20, la variación de los resultados obtenidos se encuentra dentro del error experimental, confirmándose de este modo la estabilidad de los esquemas en diferencias utilizados.

Comparación con la solución analítica de Culham et al.¹

La comparación entre los resultados obtenidos por Culham et al.¹ y el modelo propuesto en este trabajo se muestra en la Figura 4, en la cual las curvas de trazo continuo representan a la solución analítica y la discontinua a la solución numérica. Para esta verificación se utilizaron los mismos datos de la experiencia de laboratorio de Bruce et al.².

Las discrepancias entre las soluciones analíticas y numéricas no excede, en ninguno de los perfiles, a un error relativo del 2.8%. Nótese, sin embargo, el incremento en el error relativo en las proximidades del extremo del cilindro, $x = 6.27$ metros. El incremento mencionado se debe a que Culham et al.¹ definen una función fuente $S(x, t)$ en $0 \leq x \leq L$, para todo t , dada por (16), que condiciona el valor de la solución numérica en dicho intervalo, y a la vez establece la función $P(L, t)$, para todo t , como condición de borde en $x = L$ dada por (14c).

Se crea así una discontinuidad en dicho borde que afectará los valores de la solución numérica. Este incremento en el error relativo puede disminuirse afinando la grilla en el entorno de $x = L$. Esto fue comprobado en las experiencias numéricas efectuadas. Pero también se comprueba que el error aumenta a medida que transcurre el tiempo.

Por otra parte es conveniente aclarar que el problema de contorno resuelto por Culham et al.¹ carece de utilidad práctica en lo referente a la simulación de yacimientos de gas; en este sentido son de interés los problemas de contorno con condición de borde exterior de presión constante o caudal constante, ya que éstas son las condiciones típicas de producción.

Distribución de presión para condiciones de yacimientos

A efectos de mostrar el comportamiento de los modelos numéricos propuestos, se aplicaron datos de yacimientos publicados por Al'Hussainy y Ramey³. Los datos corresponden a ensayos de pozos realizados en condiciones de alta presión, para que las propiedades del gas real varíen con ésta.

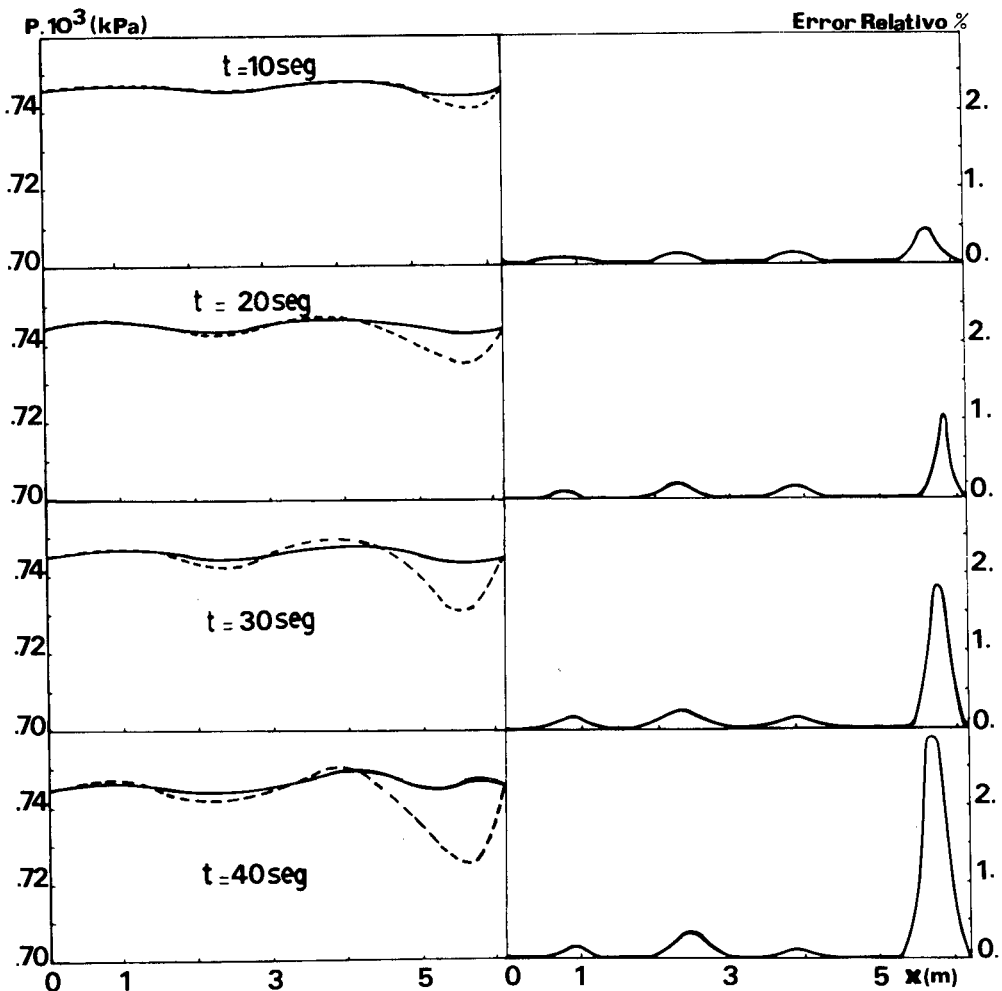


Figura 4. Comparación de las soluciones numéricas con la solución analítica de Culham et al.¹ (1971).

Datos del reservorio

$P_{\text{in}}(\text{presión inicial}) = 2300 \text{ psia} = 15859 \text{ kPa}$
 h (altura del reservorio) = 10 ft = 3.048 m
 L (longitud del reservorio unidimensional) = 2980 ft = 908.3 m
 T (temperatura del reservorio) = 130°F = 327.59°K
 ϕ (porosidad) = 0.1
 S_g (saturación de gas en el medio poroso) = 77% del volumen poral
 $K = 4.8 \text{ mD} = 0.47 \times 10^{-14} \text{ m}^2$

Propiedades del gas

Para el cálculo del factor $-Z$ de desviación para valores de la presión comprendidos entre los de la tabla se utilizaron polinomios de interpolación de segundo grado para los intervalos correspondientes. Análogamente, para el cálculo de la viscosidad se

Presión (psia)	P (kPa)	Z (Factor de desviación)	μ (viscosidad, cp)	μ (Pa.seg)
400	2758	0.95	0.0117	1.17×10^{-5}
800	5516	0.90	0.0125	1.25×10^{-5}
1200	8274	0.86	0.0132	1.32×10^{-5}
1600	11031	0.81	0.0146	1.46×10^{-5}
2000	13790	0.80	0.0163	1.63×10^{-5}
2400	16547	0.81	0.0180	1.80×10^{-5}

utilizaron polinomios de interpolación lineales.

En la Figura 5 con trazo continuo se grafican las distribuciones de presión a distintos tiempos, para condiciones de producción de presión constantes, $P = 6894$ kPa. Se aplicó el esquema semi-implícito y el esquema totalmente implícito. Las pequeñísimas diferencias entre ambos, del orden de 0.01%, no son distinguibles en la escala del dibujo.

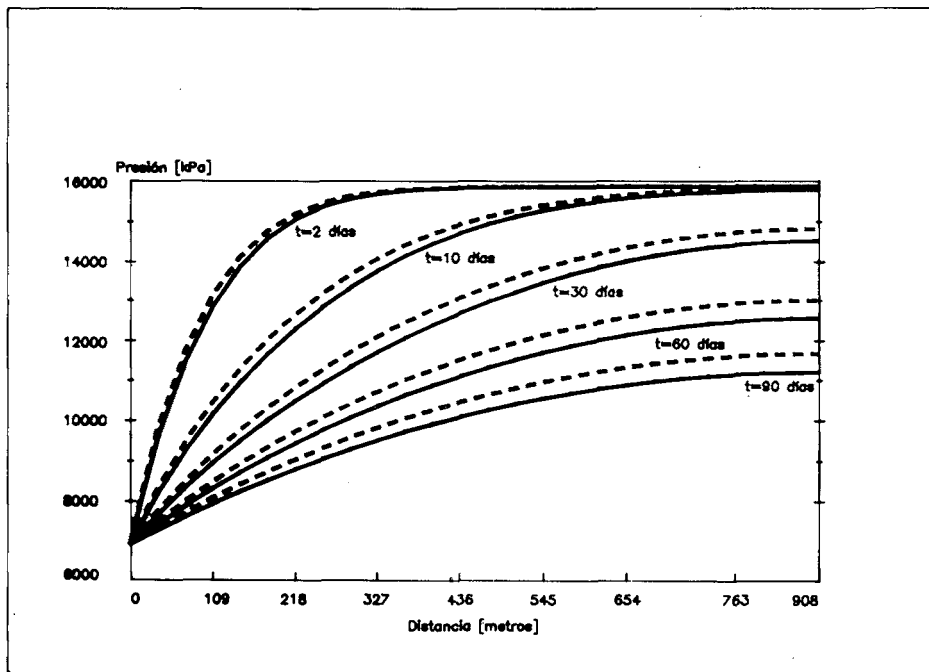


Figura 5. Soluciones numéricas para condición de contorno de presión constante en $x = 0$. Los datos se extrajeron del trabajo de Al'Hussainy et al.³.

Se pueden hacer análogas consideraciones respecto del problema con condiciones de borde de caudal constante, $Q = 0.524$ m³/seg, cuyos resultados se muestran con trazo continuo en la Figura 6.

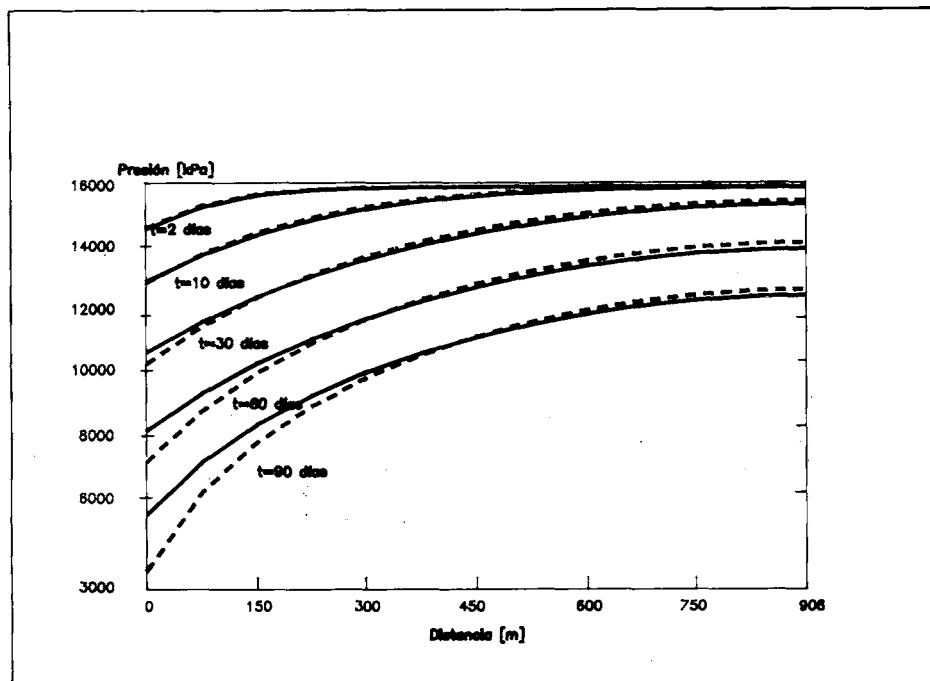


Figura 6. Soluciones numéricas para condición de contorno de caudal de producción constante en $x = 0$. Datos extraídos del trabajo de Al'Hussainy et al.³.

Los resultados presentados en las Figuras 5 y 6 se mantuvieron prácticamente sin modificación al variar, en todas las combinaciones posibles, el número de grillas desde 10 hasta 100 (en la forma 10, 20, 30, 40, 50, 100) y el paso de tiempo, Δt , en 1/4, 1/2, 1 días.

Influencia de la variación de las propiedades del gas con la presión

En la Figura 5 se comparan las distribuciones de presión que corresponden a los datos de la tabla (gas real hidrocarburo en condiciones de yacimiento), con las distribuciones obtenidas considerando arbitrariamente las propiedades del gas fijas con su valor calculado a la presión inicial $P_{\text{inicial}} = 15858$ kPa. Las distribuciones de presión en condiciones reales se sitúan por debajo de las distribuciones correspondientes a valores $Z(P_{\text{inicial}})$, $\mu(P_{\text{inicial}})$ fijos. La condición de borde en la Figura 5 es presión constante en el pozo. En la Figura 6, para condición de borde de caudal constante en el pozo productor, se comparan también las soluciones correspondientes a gas real y a un gas hipotético cuyas propiedades no varían. Puesto que la viscosidad del gas aumenta con la presión, $\mu(P_{\text{inicial}})$ constante es mayor que la viscosidad de un gas real (estimada a presiones decrecientes). En consecuencia, para mantener un mismo caudal de producción, si la viscosidad del gas real es menor y de acuerdo con la ley de Darcy, su gradiente de presión debe ser también menor. Esto se visualiza en la Figura 6.

Influencia de la porosidad

En la Figura 7 se analiza la influencia de la porosidad de la roca-reservorio en los perfiles de presión para el caso de presión constante en el pozo y a un tiempo de 10 días. Los perfiles son más empinados (las curvas presentan mayor pendiente en el pozo), cuanto menor es la porosidad. Sin embargo, la variación de porosidad dentro de valores aceptables para un yacimiento, tiene una pequeña influencia en las distribuciones de presión. Los datos utilizados para construir la Figura 7 son los de gas real en condiciones de yacimiento ya mencionados. Con los mismos datos se construyeron las soluciones de la Figura 8.

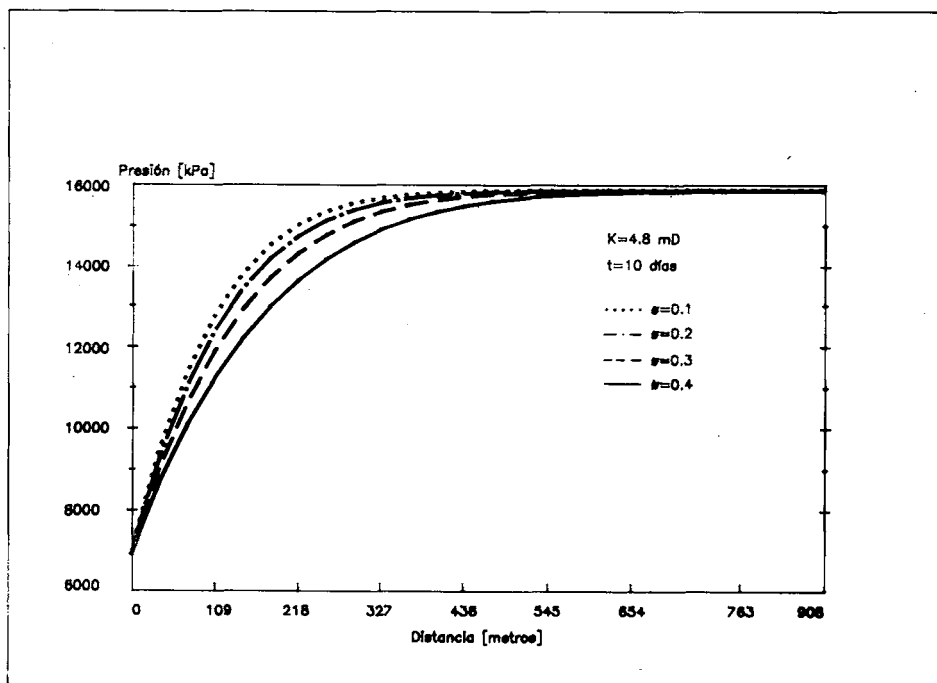


Figura 7. Influencia de la porosidad de la roca reservorio sobre los perfiles de presión para el caso de presión constante en $x = 0$ y a un tiempo de 10 días. Datos extraídos del trabajo de Al'Hussainy et al.³.

Influencia de la permeabilidad

En la Figura 8 se muestran las distribuciones de presión para diferentes permeabilidades y las condiciones de contorno y propiedades del gas idénticas a las de la Figura 7. Los perfiles corresponden a un tiempo $t = 10$ días. La presión inicial fue $P_{\text{in}} = 15858 \text{ kPa}$ y la presión fija en el fondo del pozo $P_w = 6894 \text{ kPa}$. La perturbación originada por la presencia del pozo, es transmitida hacia el yacimiento a mayores distancias cuanto mayor es la permeabilidad.

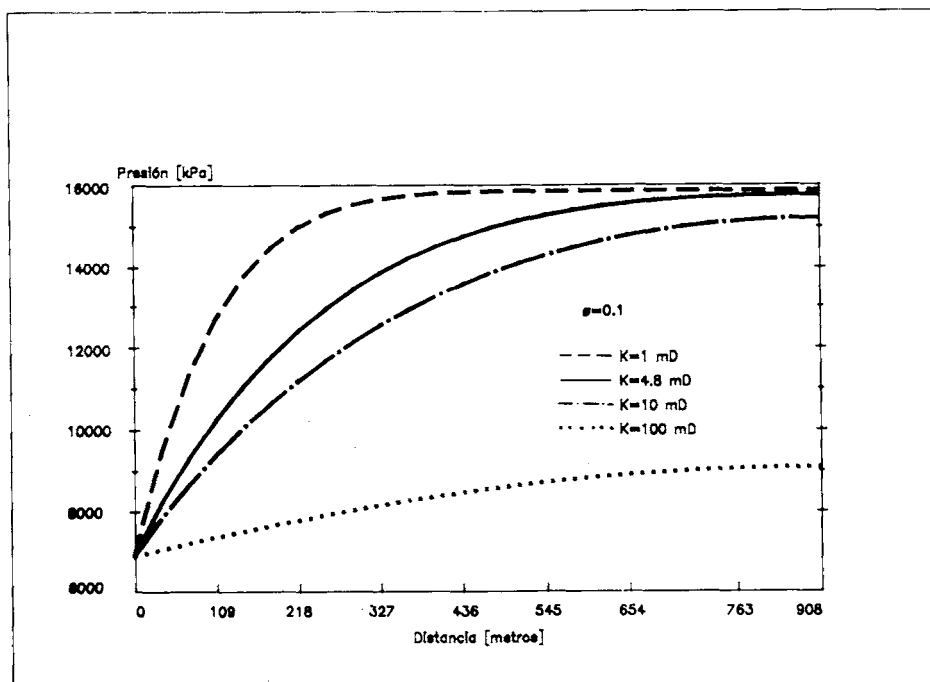


Figura 8. Influencia de la permeabilidad de la roca reservorio al flujo del gas real hidrocarburo considerado sobre los perfiles de presión en las condiciones de la Figura 7.

CONCLUSIONES

El flujo unidimensional de un gas real en estado transitorio a través de un medio poroso está representado por una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden. Esta ecuación se resuelve por distintos métodos numéricos en diferencias finitas, y se concluye lo siguiente:

- la aplicación de un esquema explícito en transmisibilidades e implícito en presiones, de otro totalmente implícito y de este último complementado con el método de Newton-Raphson generalizado, conduce a idénticos resultados a los fines prácticos; tanto para gases en condiciones ideales como para gases reales hidrocarburos en condiciones de yacimiento;
- los tres métodos mencionados verifican el caso particular del flujo de un gas ideal. Es decir, coinciden con los resultados numéricos y experimentales publicados por Bruce et al.²;
- los métodos concuerdan también con la solución analítica para un caso especial presentada por Culham et al.¹. Sin embargo existen pequeñas discrepancias cerca del extremo donde ocurre la producción de gas debido a las causas mencionadas en el análisis de resultados;
- se obtienen distribuciones de presión $P(x,t)$ para gas real hidrocarburo en condiciones de yacimientos y para un gas hipotético cuyas propiedades quedan

fijas en sus valores a la presión inicial. Las presiones obtenidas son menores para el gas real con variaciones en sus propiedades para el caso de presión de producción constante;

finalmente, se analiza la influencia de la porosidad y de la permeabilidad de la roca-reservorio en las distribuciones de presión para un gas real en condiciones de yacimiento.

La ecuación se resuelve con las condiciones de borde de presión constante y de caudal constante, que corresponden a las condiciones de operación usuales de los pozos productores de gas. En consecuencia, tiene una aplicación práctica para estimar el flujo unidimensional de gas hacia una fractura, en los casos de pozos gasíferos fracturados. Además el método propuesto para coordenadas cartesianas es transformable a coordenadas cilíndricas para flujo radial. Esta última solución se utiliza en la interpretación de los ensayos de pozos gasíferos.

APENDICE

A continuación se definen los elementos de la ecuación matricial (19), la cual reproducimos

$$\bar{T}\bar{\psi} + \bar{Q}' = \bar{\Gamma}' \Delta_t \bar{\psi}$$

La i -ésima componente de esta ecuación resulta

$$T_{i-\frac{1}{2}} \psi_{i-1} - (T_{i-\frac{1}{2}} + T_{i+\frac{1}{2}}) \psi_i + T_{i+\frac{1}{2}} \psi_{i+1} + Q'_i = \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \left(\frac{c}{Z}\right)_i (\psi_i - \psi_i^n) \quad (A.1)$$

Las cantidades $T_{i\pm\frac{1}{2}}$ se denominan transmisibilidades¹⁰ y se calculan mediante la siguiente expresión:

$$T_{i\mp\frac{1}{2}} = \left(\frac{\lambda}{Z}\right)_{i\mp\frac{1}{2}} \frac{A_i}{\Delta x_{i\mp\frac{1}{2}}} \quad (A.2)$$

donde A_i es el valor del área de la sección transversal de la i -ésima celda de la grilla unidimensional considerada y los $\left(\frac{\lambda}{Z}\right)_{i\mp\frac{1}{2}}$ están dados por

$$\left(\frac{\lambda}{Z}\right)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{i-1}^+ + \delta_i^-}{\frac{\delta_{i-1}^+}{\left(\frac{\lambda}{Z}\right)_{i-1}} + \frac{\delta_i^-}{\left(\frac{\lambda}{Z}\right)_i}} \quad (A.3)$$

$$\left(\frac{\lambda}{Z}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_i^+ + \delta_{i+1}^-}{\frac{\delta_i^+}{\left(\frac{\lambda}{Z}\right)_i} + \frac{\delta_{i+1}^-}{\left(\frac{\lambda}{Z}\right)_{i+1}}} \quad (A.4)$$

La i -ésima componente del vector \bar{Q}' es $V_i Q_i$ donde $V_i = A_i \Delta x_i$ es el volumen de la i -ésima celda de la grilla unidimensional propuesta.

La matriz diagonal $\bar{\Gamma}'$ tiene por i -ésimo elemento a:

$$\Gamma'_i = \frac{\phi_i V_i}{\Delta t} \left(\frac{c}{Z} \right)_i \quad (\text{A.5})$$

Finalmente, la i -ésima componente del vector $\Delta_t \bar{\psi}$ del segundo miembro de la ecuación matricial (19) es de la forma

$$\Delta_t \psi_i = \psi_i^{n+1} - \psi_i^n \quad (\text{A.6})$$

Obsérvese que se ha omitido el nivel de tiempo $n+1$ en la ecuación (A.1).

Se definen las derivadas $\frac{d}{d\psi_i} \left(\frac{c}{Z} \right)_i$ y $\frac{\partial T_i}{\partial \psi_i}$ que aparecen en la formación de los elementos de la matriz Jacobiana (31).

$$\frac{d}{d\psi_i} \left(\frac{c}{Z} \right)_i = \frac{\left[2c^2 + (\psi_i^{\frac{1}{2}})^2 - 3 \frac{c(\psi_i^{\frac{1}{2}})}{\psi_i^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{Z(\psi_i^{\frac{1}{2}})} - \frac{1}{Z(\psi_i^{\frac{1}{2}})} \frac{d^2 Z}{d(\psi_i^{\frac{1}{2}})^2} \right]}{2\psi_i^{\frac{1}{2}} Z(\psi_i^{\frac{1}{2}})} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial T_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \psi_{i+1}} = \frac{-\delta_{i+1}^- T_{i+\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{Z_{i+1}} \frac{dZ_{i+1}}{dP_{i+1}} + \frac{1}{\mu_{i+1}} \frac{d\mu_{i+1}}{dP_{i+1}} \right) \psi_i^{-\frac{1}{2}}}{2A_i \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_{i+1}} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial T_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \psi_i} = \frac{-\delta_i^+ T_{i+\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{Z_i} \frac{dZ_i}{dP_i} + \frac{1}{\mu_i} \frac{d\mu_i}{dP_i} \right) \psi_i^{-\frac{1}{2}}}{2A_i \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_i} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial T_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \psi_{i-1}} = \frac{-\delta_{i-1}^+ T_{i-\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{Z_{i-1}} \frac{dZ_{i-1}}{dP_{i-1}} + \frac{1}{\mu_{i-1}} \frac{d\mu_{i-1}}{dP_{i-1}} \right) \psi_{i-1}^{-\frac{1}{2}}}{2A_i \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_{i-1}} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial T_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \psi_i} = \frac{-\delta_i^- T_{i-\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{Z_i} \frac{dZ_i}{dP_i} + \frac{1}{\mu_i} \frac{d\mu_i}{dP_i} \right) \psi_i^{-\frac{1}{2}}}{2A_i \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_i} \quad (\text{A.11})$$

REFERENCIAS

1. W.E. Culham y R.S. Varga, "Numerical methods for time-dependent, nonlinear boundary value problems", *Soc. Pet. Eng. J.*, pp. 374-388, (1971).
2. G.H. Bruce, D.W. Peaceman, H.H. Rachford Jr., y J.D. Rice, "Calculations of unsteady-state gas flow through porous media", *Trans. AIME* 198, pp. 79-92, (1953).
3. R. Al'Hussainy y H.J. Ramey, "Application of real gas flow theory to well testing and deliverability forecasting", *J. Pet. Tech.*, pp. 637-642, (1966b).
4. R. Al'Hussainy, H.J. Ramey y P.B. Crawford, "The flow of real gases through porous media", *J. Pet. Tech.*, pp. 624-636, (1966a).
5. A.F. Van Everdingen y W. Hurst, "The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs", *Trans. AIME* 179, pp. 305-324, (1949).
6. R.A. Wattenbarger y H.J. Ramey, "Gas well testing with turbulence, damage and wellbore storage", *Trans. AIME* 243, pp. 99-109, (1968).
7. K.H. Coats, J.R. Dempsey, K.L. Ancell y D.E. Gibbs, "Analysis and Prediction of Gas Well Performance", Presented at *46th Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME*, New Orleans, (1971).
8. W. Hurst, "The solution of nonlinear equations", *Soc. Pet. Eng. J.*, *Trans. AIME* 255, pp. 348-356, (1973).
9. P.W. Dranchuk y J. Flores, "Non Darcy transient radial gas flow through porous media", *Soc. Pet. Eng. J.*, *Trans. AIME* 259, pp. 129-139, (1975).
10. K. Aziz y A. Settari, "*Petroleum reservoir simulation*". Applied Science Publishers LTD, London, Inglaterra, (1979).
11. D.W. Peaceman, "*Fundamentals of Numerical reservoir simulation*", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, (1977).
12. M. Muskat, "*Physical Principles of Oil Production*", IHRDC, Publishers, (1981).
13. B.P. Demidovich y I.A. Maron, "*Computational mathematics*", Mir Publishers, Moscow, (1976).
14. R.D. Richtmyer y K.W. Morton, "*Difference Methods for Initial-Value Problems*", Second edition, Interscience Publishers a division of John Wiley and Sons, (1967).
15. G. Marshall, "*Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales. Tomo 2: Ecuaciones en derivadas parciales*", Editorial Reverté Argentina S.A., (1986).
16. G. Marshall, "*Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales. Tomo 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias*", Editorial Reverté Argentina S.A., (1985).